パターン認識

ー特徴抽出と不変特徴抽出ー

担当:和田　俊和
部屋　A513
Email　twada@ieee.org

講義資料はhttp://wada1.sys.wakayama-u.ac.jp/PR/

Fourier 変換

Mellin変換

演習課題

Fourier 級数展開からFourier変換へ

- 内積の積分区間を無限大に拡大し、周波数を実数領域とした複素型のFourier級数展開とみなすこともできる。

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jwt}dt$$

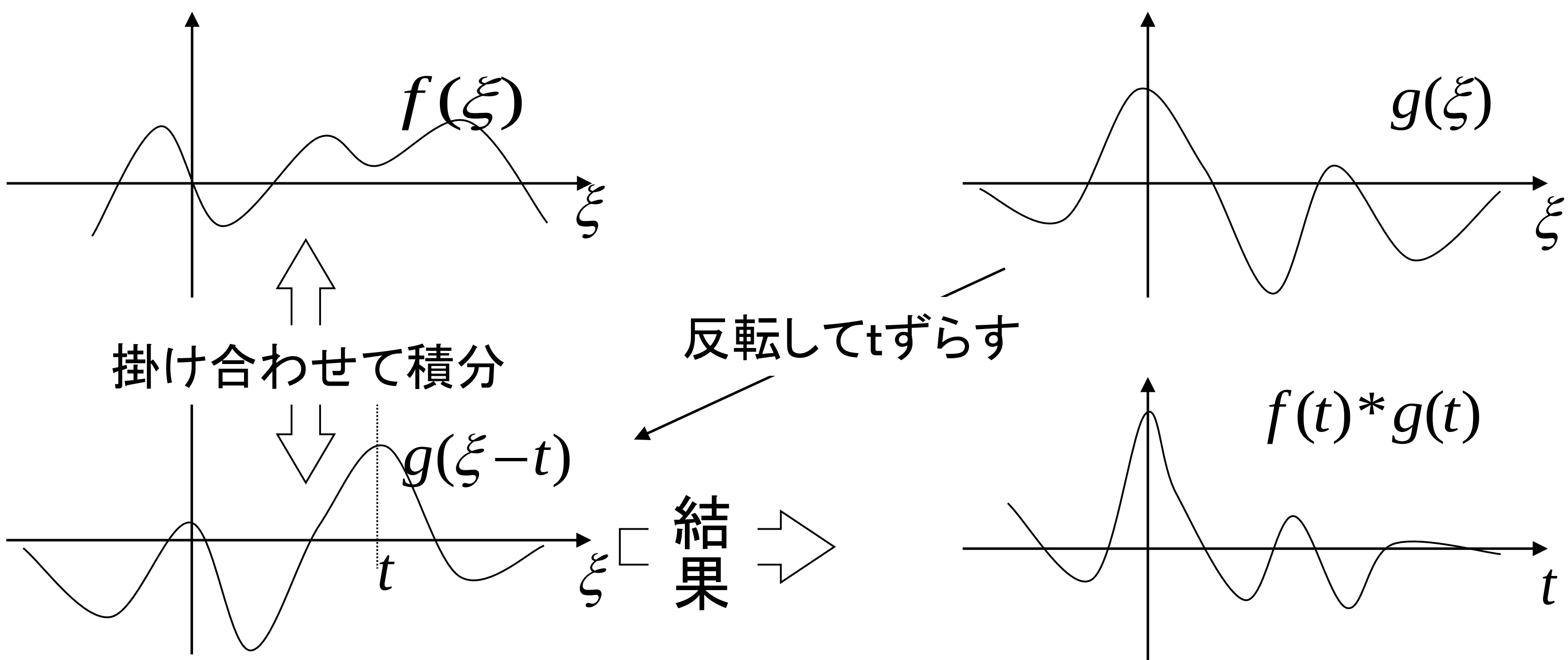
- Fourier変換は、実関数$f(t)$から複素関数$F(\omega)$への写像である。
- その際に、関数の変数tは周波数を表す変数ωに変わる。

Fourier変換と畳み込み積分（1）

- 畳み込み積分

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(t-\xi)d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\xi)g(\xi)d\xi$$



Fourier変換と畳み込み積分（２）

- 畳み込み積分のFourier変換

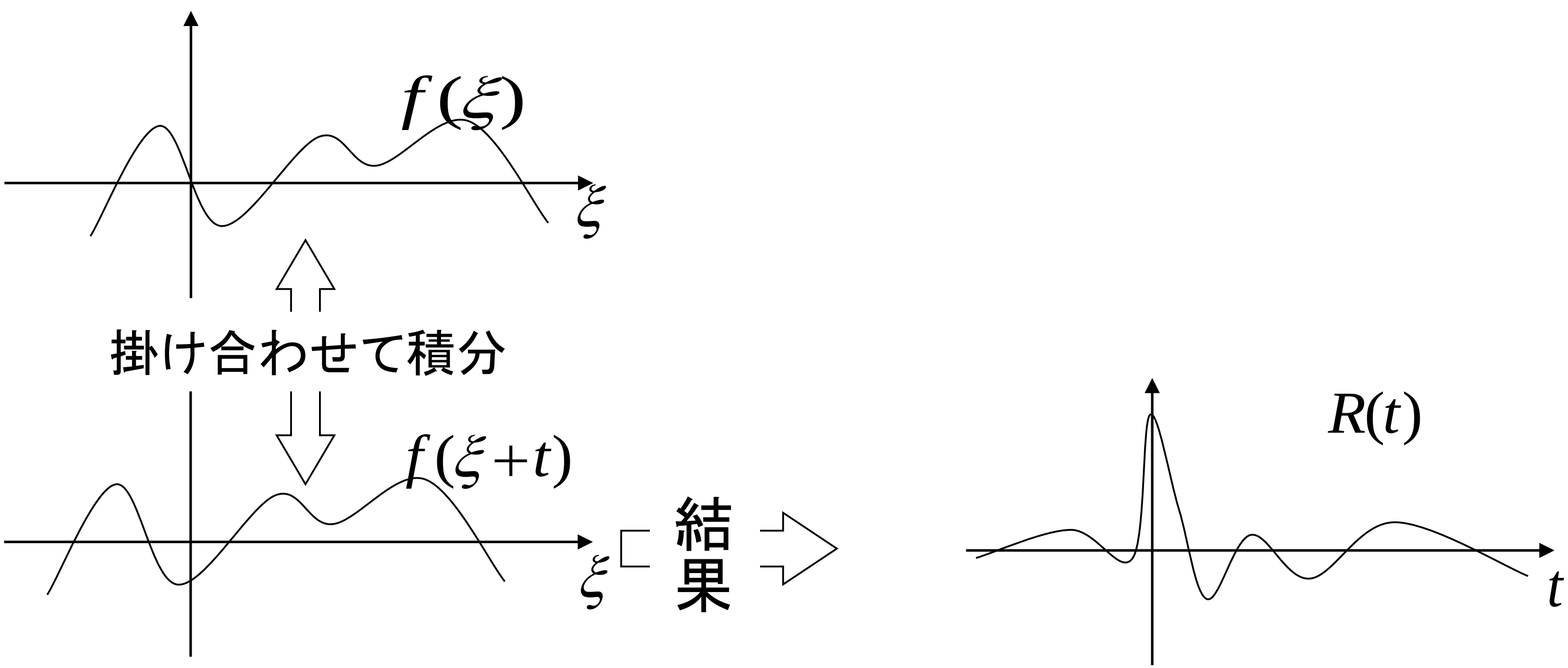
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(t-\xi)d\xi\right)e^{-j\omega t}dt = F(\omega)G(\omega)$$

- 単なる掛け算になる。

Fourier変換と自己相関関数（1）

- 自己相関関数

$$R(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,f(\xi+t)\,d\xi$$



Fourier変換と自己相関関数（2）

自己相関関数のFourier変換

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)f(\xi+t)\,d\xi\right)e^{-j\omega t}\,dt = F^{*}(\omega)F(\omega)$$

$$= \| F(\omega) \|^{2}$$

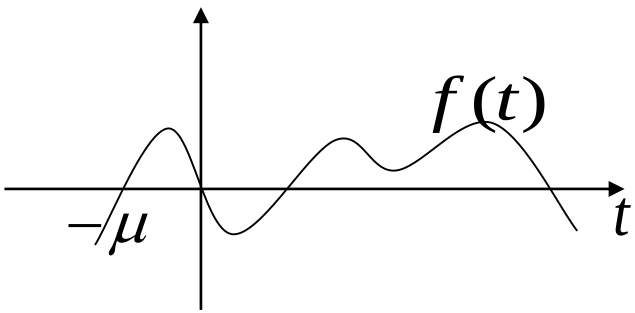
パワースペクトル

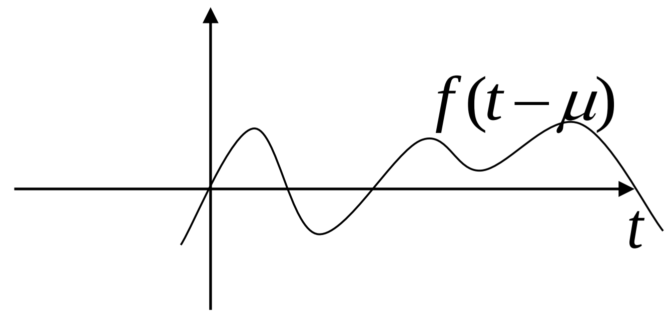
Fourier変換の結果はパワーと位相に分解できる

パワー　$: P(\omega) = \| F(\omega) \|^{2}$

位相　$: \phi(\omega) = \tan^{-1}(\mathrm{Im}(F(\omega)) / \mathrm{Re}(F(\omega)))$

Fourier 変換と平行移動





$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jwt}dt$$

$$\begin{aligned}F'(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\mu)e^{-jwt}dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty} f(T)e^{-jw(T+\mu)}dT\\&=\underline{e^{-j\omega\mu}}F(\omega)\end{aligned}$$

回転因子

平行移動成分の除去方法（1）

パワースペクトルを求める

$$F'(\omega) = e^{-j\omega\mu}F(\omega)$$

$$F'^{*}(\omega) = e^{j\omega\mu}F^{*}(\omega)$$

$$\|F'(\omega)\|^2 = \|F(\omega)\|^2$$

これを行うと、全ての位相成分が消えてしまうため、平行移動以外の成分も消えてしまい、識別に有効な情報まで消えてしまう。
ではどうするのが正しい方法か？

平行移動成分の除去方法(2)

対数を求める

$$F'(\omega) = e^{-j\omega\mu} F(\omega)$$

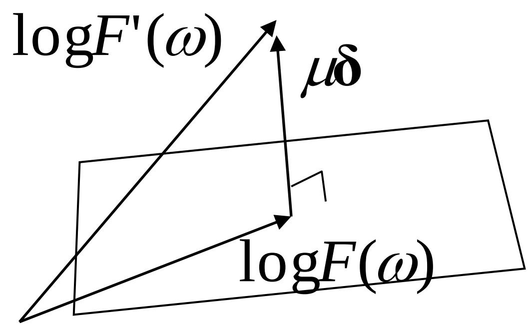
$$\log F'(\omega) = -j\omega\mu + \log F(\omega)$$

離散化して考える

$$\log F'(\omega_i) = -j\omega_i\mu + \log F(\omega_i)$$

$\boldsymbol{\delta} = -j(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_M)$とすると 平行移動の成分は

$\mu\boldsymbol{\delta}$で表される。



$\boldsymbol{\delta}^{\perp}$直交補空間

平行移動成分の除去方法（2続き）

直交補空間への射影

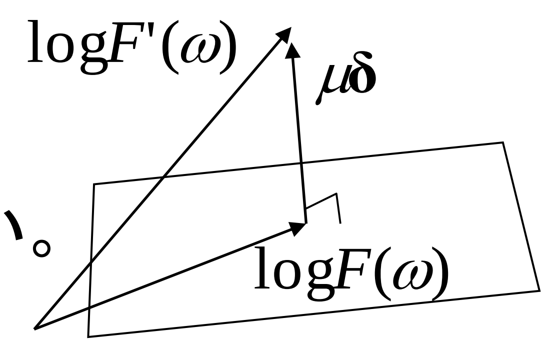
$$\mathbf{F}' = \log F'(\omega) \qquad \mathbf{F} = \log F(\omega)$$

とする。このとき、

$$\mathbf{F}' = \mu\boldsymbol{\delta} + \mathbf{F}$$

が成立している。ここで、次式が成立する

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T}{\|\boldsymbol{\delta}\|^2}\right)\mathbf{F}' = \left(\mathbf{I} - \frac{\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T}{\|\boldsymbol{\delta}\|^2}\right)\mathbf{F}$$



この方法は、平行移動成分しか除去しないので、識別に有効な他の情報は失われない。

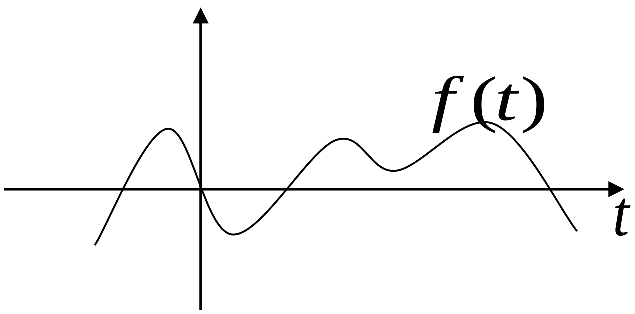
Mellin変換：一般化されたモーメント

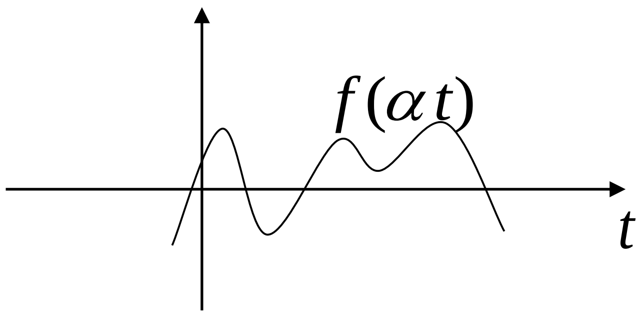
- 定義

$$\mathrm{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)t^{\omega}dt$$

- 連続次数のモーメント

Mellin 変換と伸縮





$$\mathrm{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)t^{\omega}dt$$

$$\mathrm{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t)t^{\omega}dt$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f(T)\left(\frac{T}{\alpha}\right)^{\omega}dT$$

$$=\alpha^{-(\omega+1)}\mathrm{F}(\omega)$$

あとは、対数を求めれば、Fourier変換の場合と同じようにして不変特徴が求められる。

不変特徴の導出方法

- 変換
  - Fourier変換：平行移動などの加法的変換を除去するために用いる。
  - Mellin変換：拡大・縮小などの乗法的変換を除去するために用いる。
- これらの結果に対して対数を求め、変換に対する直交補空間に射影することによって不変特徴量が求められる。

演習課題

パターン$f(x)$を観測する際に、これに直交する観測誤差$n(x)$が加わり、且つ、パターンの振幅がα倍され $\alpha(f(x)+n(x))$ が観測されるものとする。

$n(x)$のみが既知である場合、上記の変換がかかった信号から$f(x)$を求める方法を説明しなさい。

今後の予定

- 22日　最小二乗法と回帰計算
- ３１日2コマ　演習問題
- 2月5日　テスト予定日