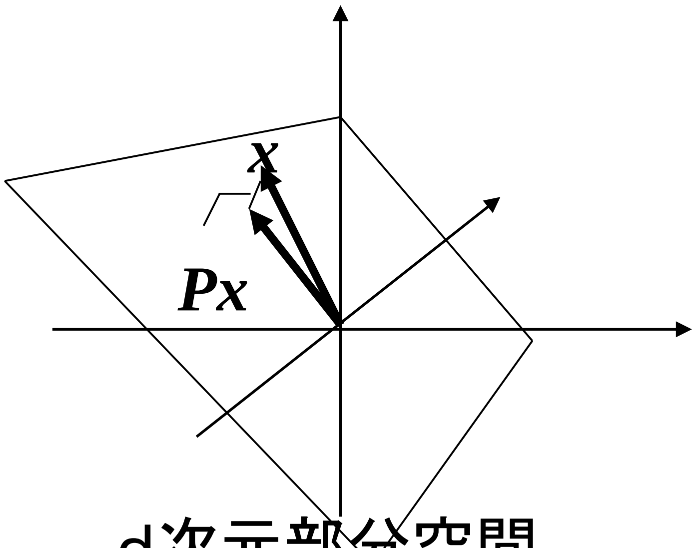
パターン認識
―部分空間法と類似度法―

担当:和田　俊和
部屋　A513
Email　twada@ieee.org

講義資料はhttp://wada1.sys.wakayama-u.ac.jp/PRA/

パターンの部分空間への射影



d次元部分空間

一般に同一クラスに属するパターンは低次元の部分空間内に偏在するケースが多い。

$$P = UU^T$$

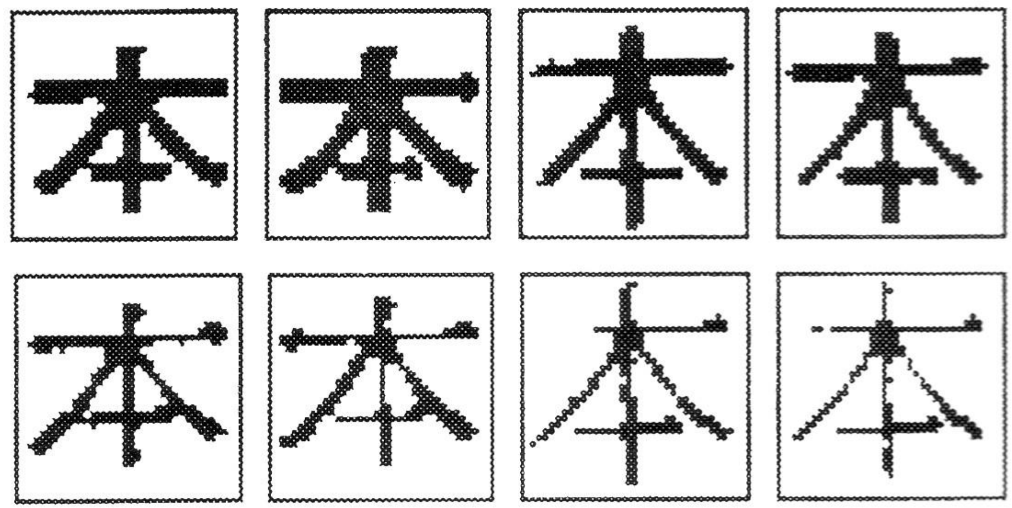
$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_d \end{bmatrix}$$

d次元正規直交基底
(K-L展開によって求める)

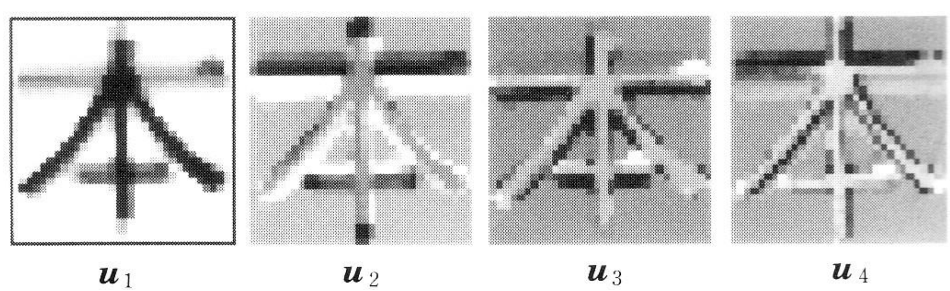
$P\mathbf{x}$ 部分空間への射影成分

部分空間の構築

$R = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T$ の固有値問題を解くことによって $\mathbf{u}_i$ が得られる。

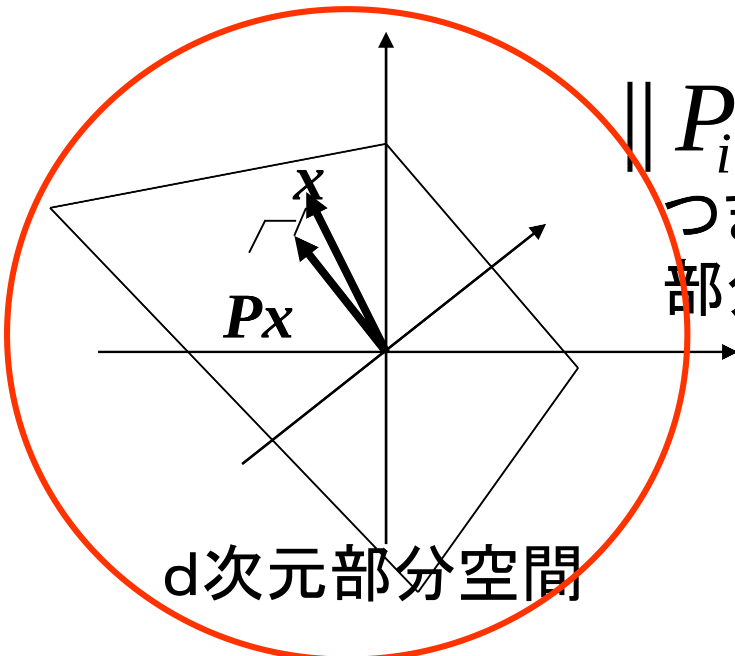


トレーニングパターン



固有ベクトル

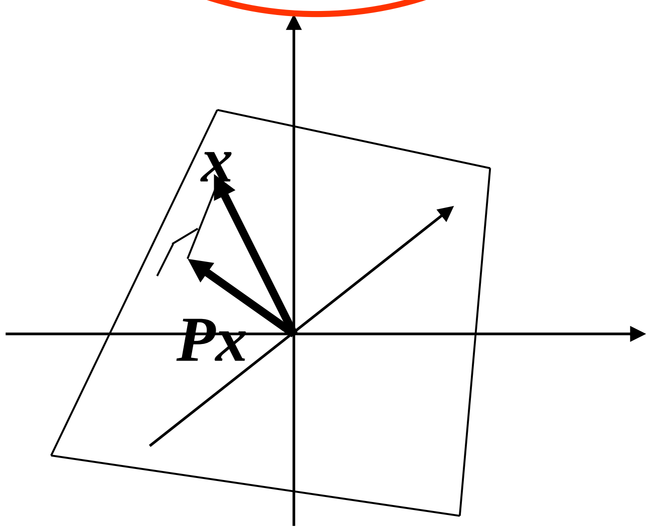
部分空間法（subspace method）

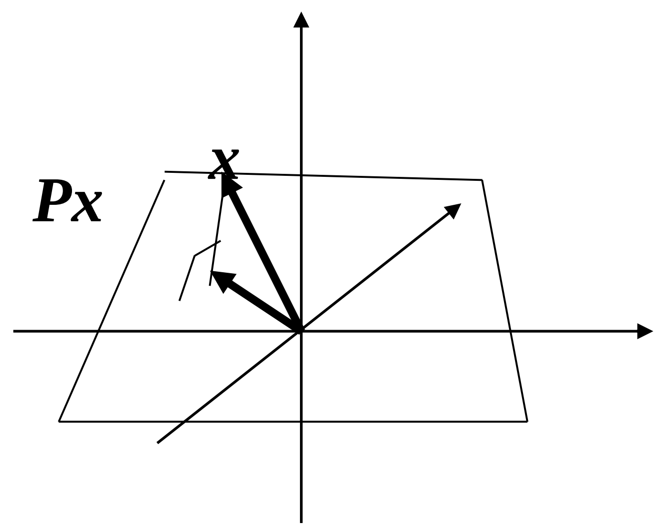


$\| P_i \mathbf{x} \|^2$ を最大化するクラスに分類する。
つまり、入力との角度差が最も小さい
部分空間に属すると判定する方法。

$$U_i = \lfloor \mathbf{u}_{i1} \quad \cdots \quad \mathbf{u}_{id_i} \rfloor$$

$$P_i = U_i U_i^T$$





部分空間法（評価尺度）

$P_i P_i = P_i$ および $P_i^T = P_i$ が成り立つ。

このことから、

$$\| P_i x \|^2 = \mathbf{x}^T P_i^T P_i \mathbf{x} = \mathbf{x}^T P_i P_i \mathbf{x} = \mathbf{x}^T P_i \mathbf{x}$$

が成り立つ。さらに、効率の良い計算方法を求めると

$$\| P_i x \|^2 = \mathbf{x}^T P_i \mathbf{x} = \mathbf{x}^T U_i U_i^T \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{d_i} (\mathbf{u}_{ij}^T \mathbf{x})^2$$

となり、この値の大小によって識別が行われる。つまり、パターン $\mathbf{x}$ がクラス ω_i に属すると考えた場合の類似度 $S_i(\mathbf{x})$ は、次式で表される。

$$S_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{d_i} (\mathbf{u}_{ij}^T \mathbf{x})^2$$

部分空間法（部分空間の次元数の決定）

部分空間の次元数の決定

- 次元数を低くし過ぎるとパターンの近似精度が落ちる。
- 次元数を上げすぎると各クラス間の重なりが大きくなり、識別性能が落ちる。

累積寄与率 $a(d_i)$

$$a(d_i) = \frac{\sum_{j=1}^{d_i} \lambda_{ij}}{\sum_{j=1}^{d} \lambda_{ij}}$$

各クラスについて定数 κ を定めて、

$$a(d_i) \leq \kappa \leq a(d_i + 1)$$

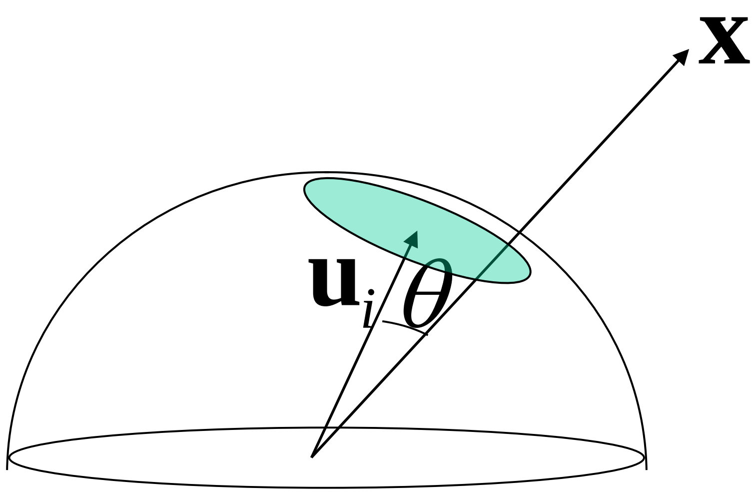
を満足する次元数 d_i を求める。

類似度法（単純類似度法）

$$S_i(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{u}_i}{\|\mathbf{x}\|}$$

$$= \cos\theta$$

$\mathbf{u}_i$ はクラス ω_i の代表パターン(単位ベクトル）



パターンの振幅変化に対しては影響を受けない。ある種の不変特徴抽出を行っていることと等価。

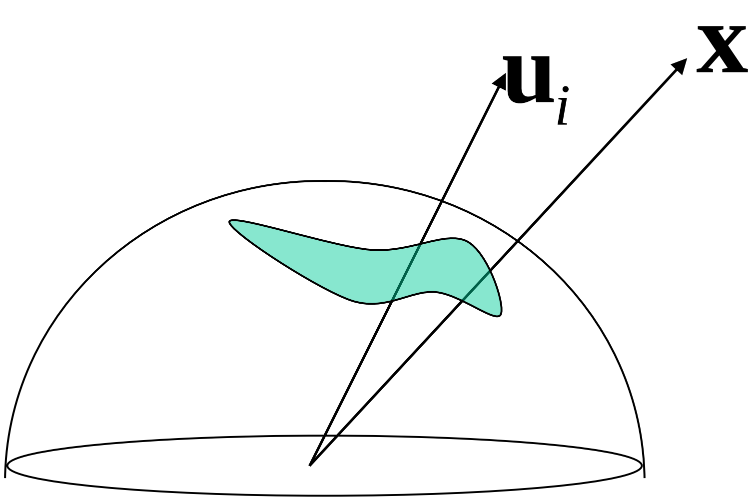
類似度法（複合類似度法）

$$S_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\lambda_{ij}(\mathbf{x}^T\mathbf{u}_{ij})^2}{\lambda_{i1}\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$$

$\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ は正規化のために導入されたものであり実際には無視できる。これを無視すると、

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\lambda_{ij}(\mathbf{x}^T\mathbf{u}_{ij})^2}{\lambda_{i1}}$$

となり、部分空間法によって求まる類似度と酷似した形式が得られる。異なる点は、個々の内積に対して重み $\lambda_{ij} / \lambda_{i1}$ が掛けられていることである。

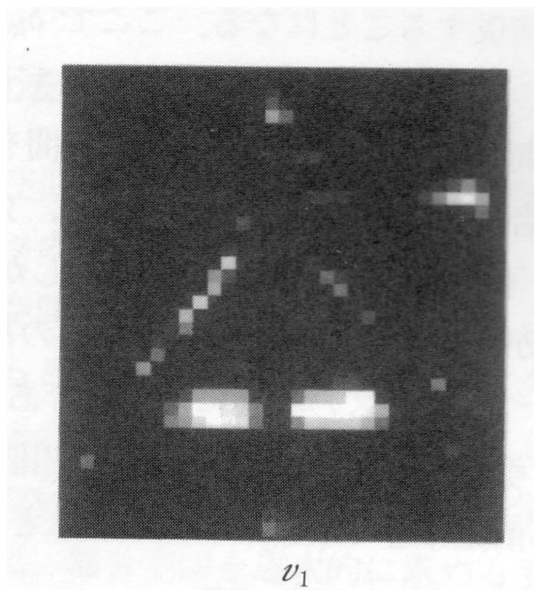


複合類似度法は部分空間法の一種

類似度法（混合類似度法）

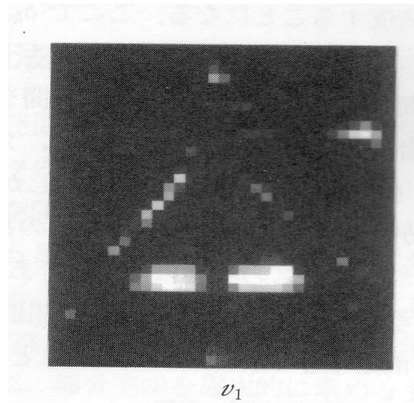
$$S_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{i1}}(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{u}_{ij})^2 - \alpha(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{v}_k)^2}{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}}$$

違いの部分にパターンがあるか否かを強調する。
例「本」か「木」か



本の木に対する残差

混合類似度

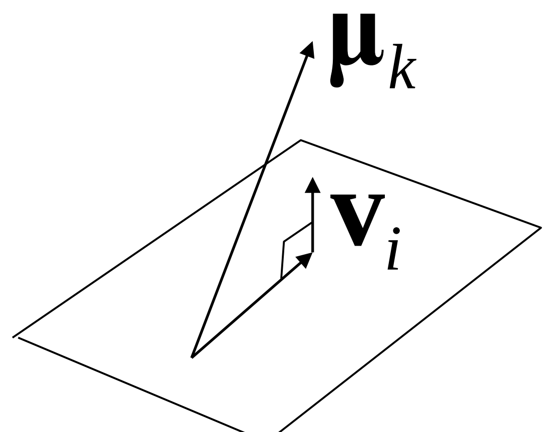


本の木に対する残差

$\mathbf{v}_i$ は、類似クラスの平均パターン $\boldsymbol{\mu}_k$ を ω_i の部分空間に射影した際の残差ベクトルを長さ1に正規化したベクトル。

$$\mathbf{v}_i' = \boldsymbol{\mu}_k - \sum_{j=1}^{d} \boldsymbol{\mu}_k^T \mathbf{u}_{ij} \mathbf{u}_{ij}$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i' / \|\mathbf{v}_i'\|$$



レポート，時間内に提出

- 部分空間法において，次の二つは等しいことを示せ．
  - 射影成分の大きさ $\| P_i \mathbf{x} \|^2$ を最大化するクラスに分類する問題
  - 残差 $\| \boldsymbol{x} - P_i \boldsymbol{x} \|^2$ を最小化するクラスに分類する問題