

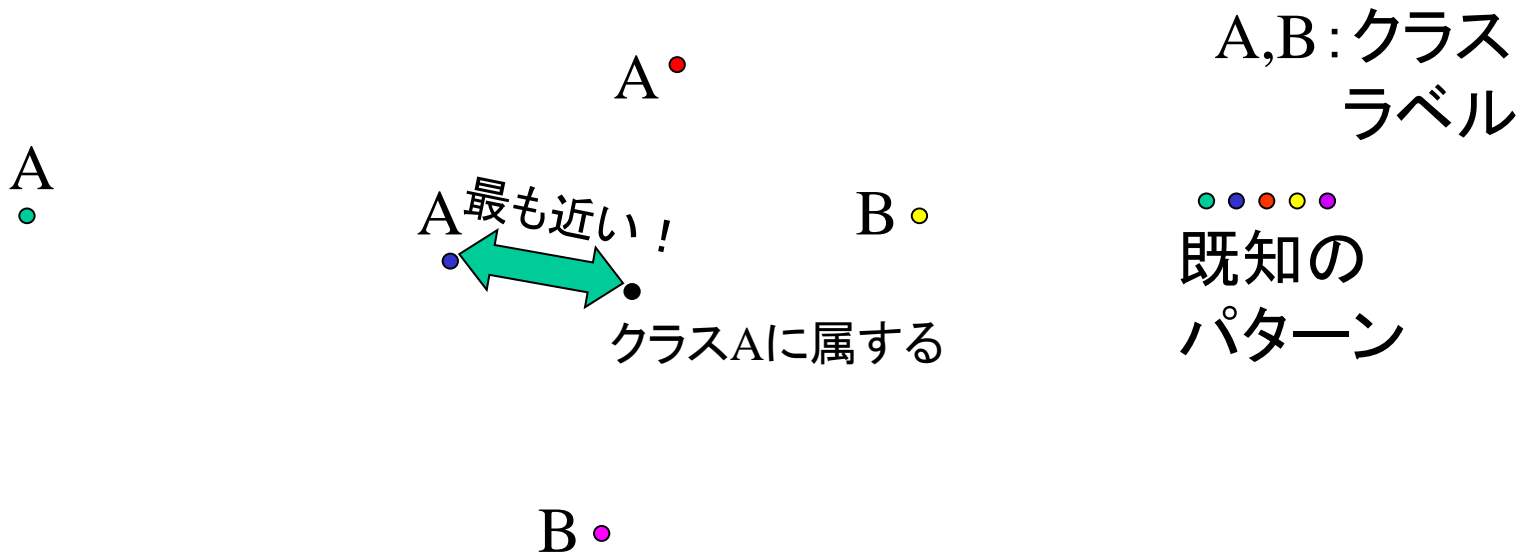
# パターン認識 —最近傍識別理論—

担当: 和田 俊和  
部屋 A513

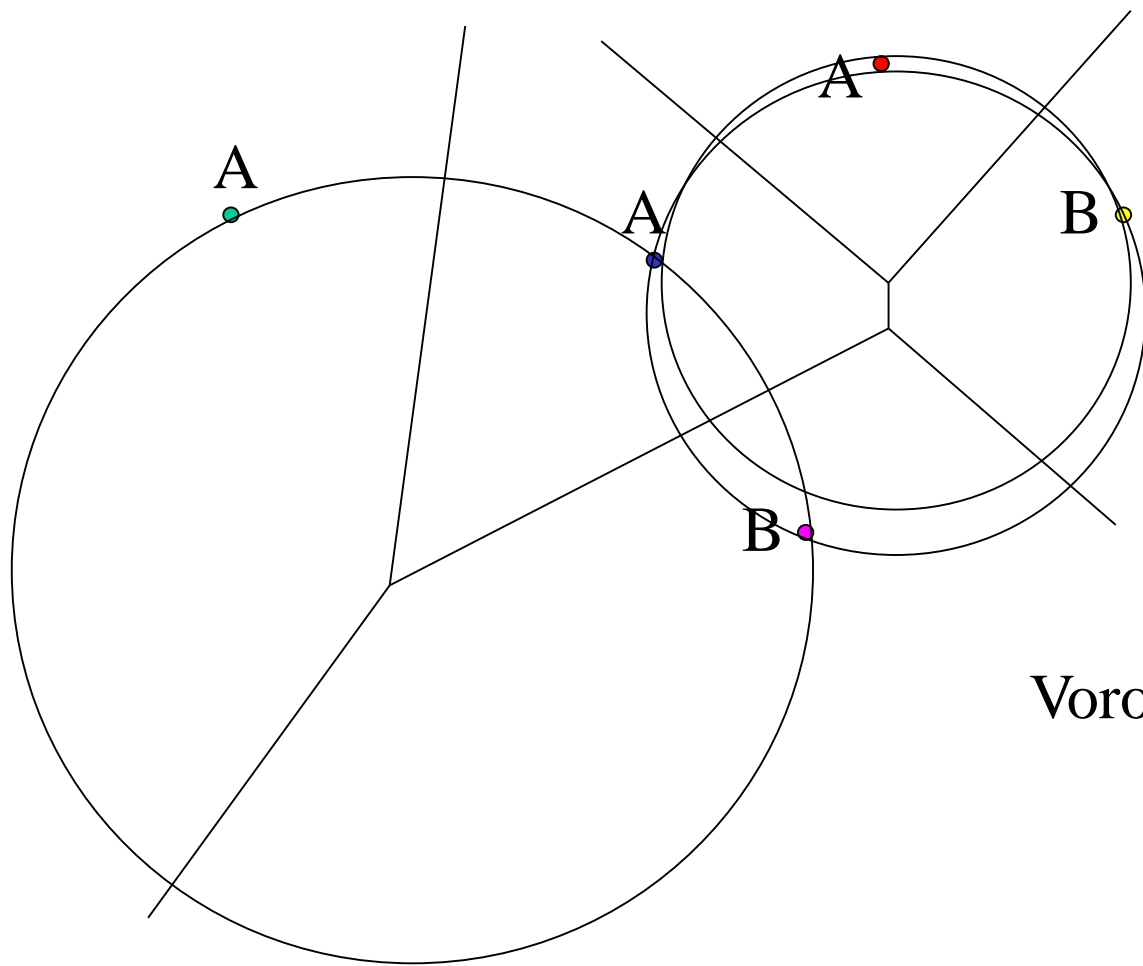
Email [twada@ieee.org](mailto:twada@ieee.org)

講義資料は<http://wada1.sys.wakayama-u.ac.jp/PRA/>

# 最も単純な識別方法 —最近傍識別規則—

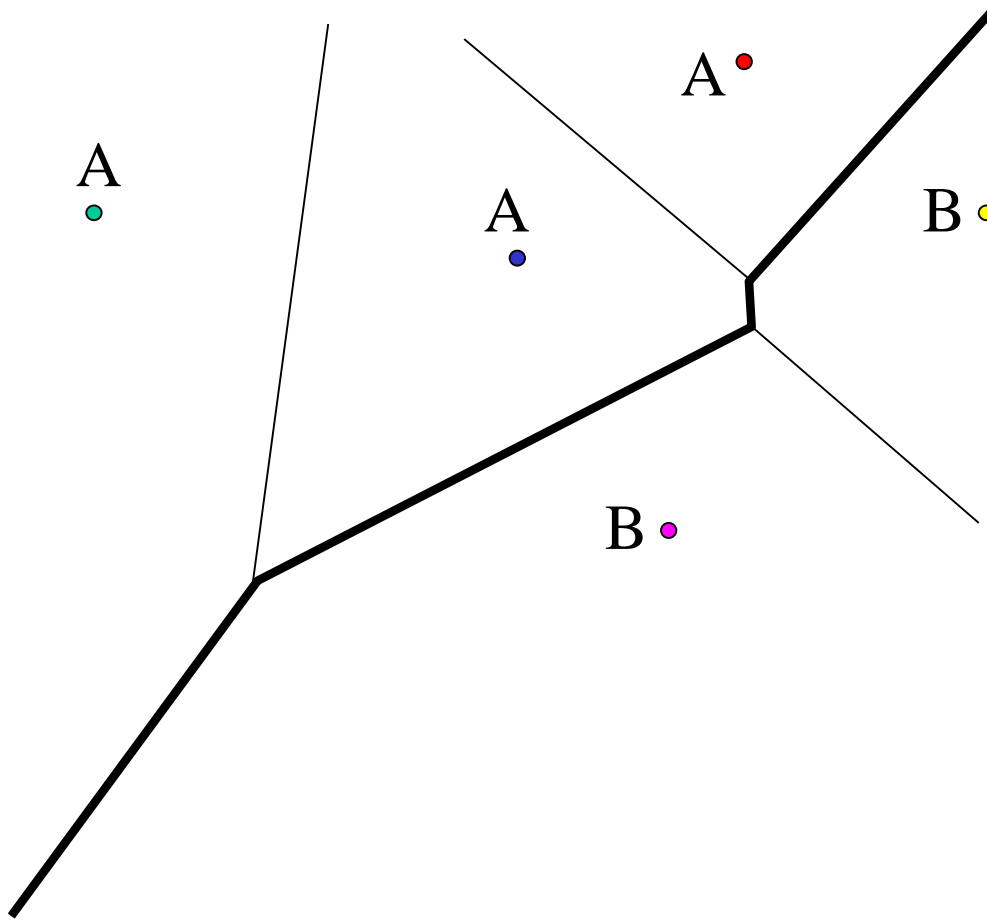


# 最近傍識別における識別境界



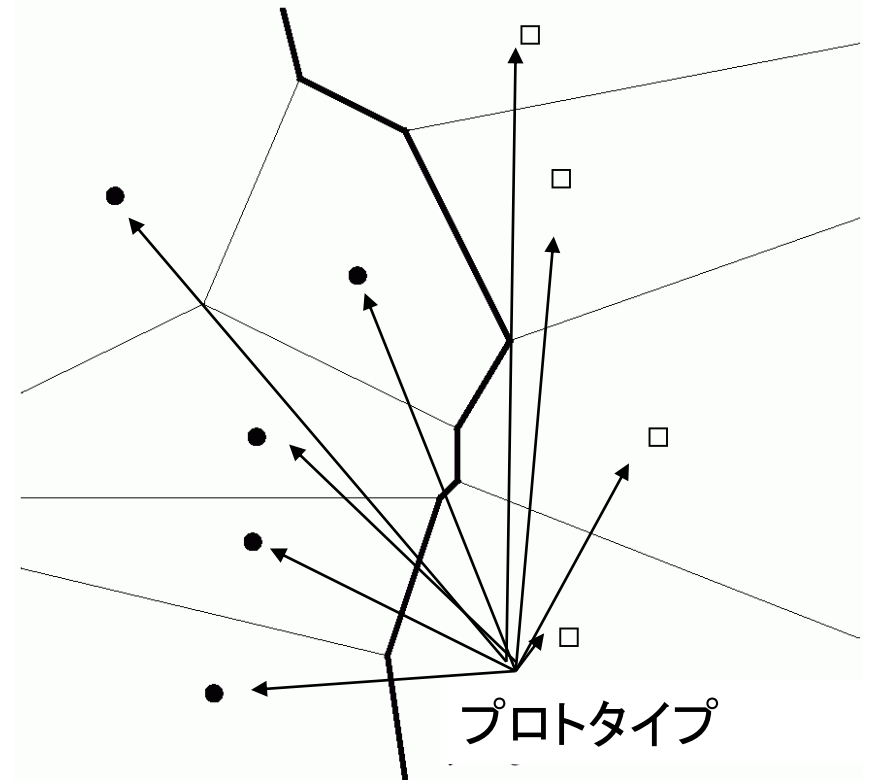
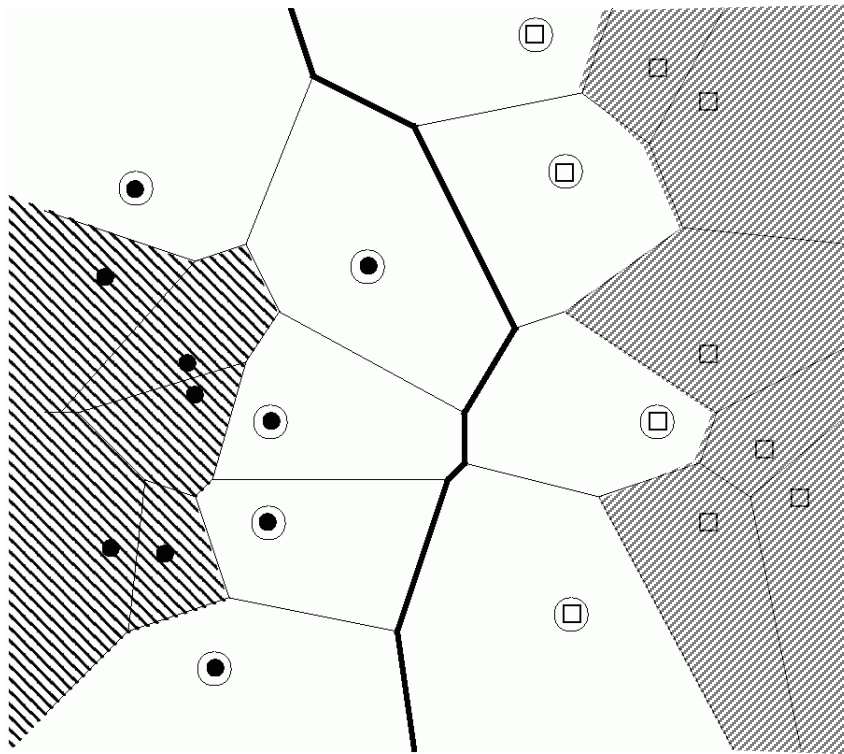
Voronoi分割

# プロトタイプが複数ある場合の 識別境界



# Voronoi Condensing

プロトタイプを少なくしても同じ結果が得られる。



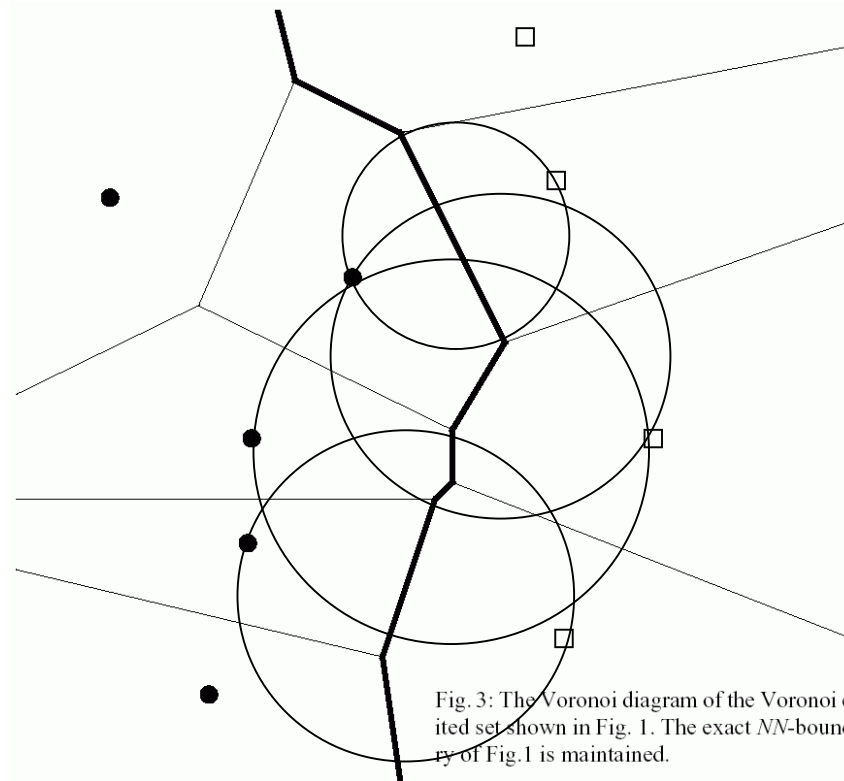
Voronoi Condensing によって求めたプロトタイプを用いても最近傍識別の性能は変わらない。

# Voronoi Condensingの実例

Delauneyグラフも灰色の線で表示されている。

# Gabriel Editing

## さらにプロトタイプを減らす



パターンを直径として持つ超球を考え、この超球内部に他のパターンが含まれていないときにプロトタイプとする。

# Gabriel Condensing の実例



# Gabriel Editing の結果は Voronoi Condensing の結果とよく似ている。

<u>Table 2</u>	<u>Original Set</u>	<u>Voronoi Edited Set</u>	<u>Gabriel Edited Set</u>
Size	150	109	39
NN-error	1.3%	1.3%	1.3%
Variance	0.31E-4	0.31E-4	0.31E-4

Table 2: The Iris Data: 150 data points in 4-space

<u>Table 3</u>	<u>Original Set</u>	<u>Voronoi Edited Set</u>	<u>Gabriel Edited Set</u>
Size	1999	1313	820
NN-error	5.9%	5.9%	6.0%
Variance	0.71E-4	0.71E-4	0.67E-4

Table 3: The Cervical Cell Data: 1999 points in 4-space

# 最近傍識別と区分的線形識別関数

$$g_i(\mathbf{x}) = \max_{l=1, \dots, L_i} \{g_i^{(l)}(\mathbf{x})\}$$

$$g_i^{(l)}(\mathbf{x}) = w_{i0}^{(l)} + \sum_{j=1}^d w_{ij}^{(l)} x_j$$

$$i = 1, 2, \dots, c$$

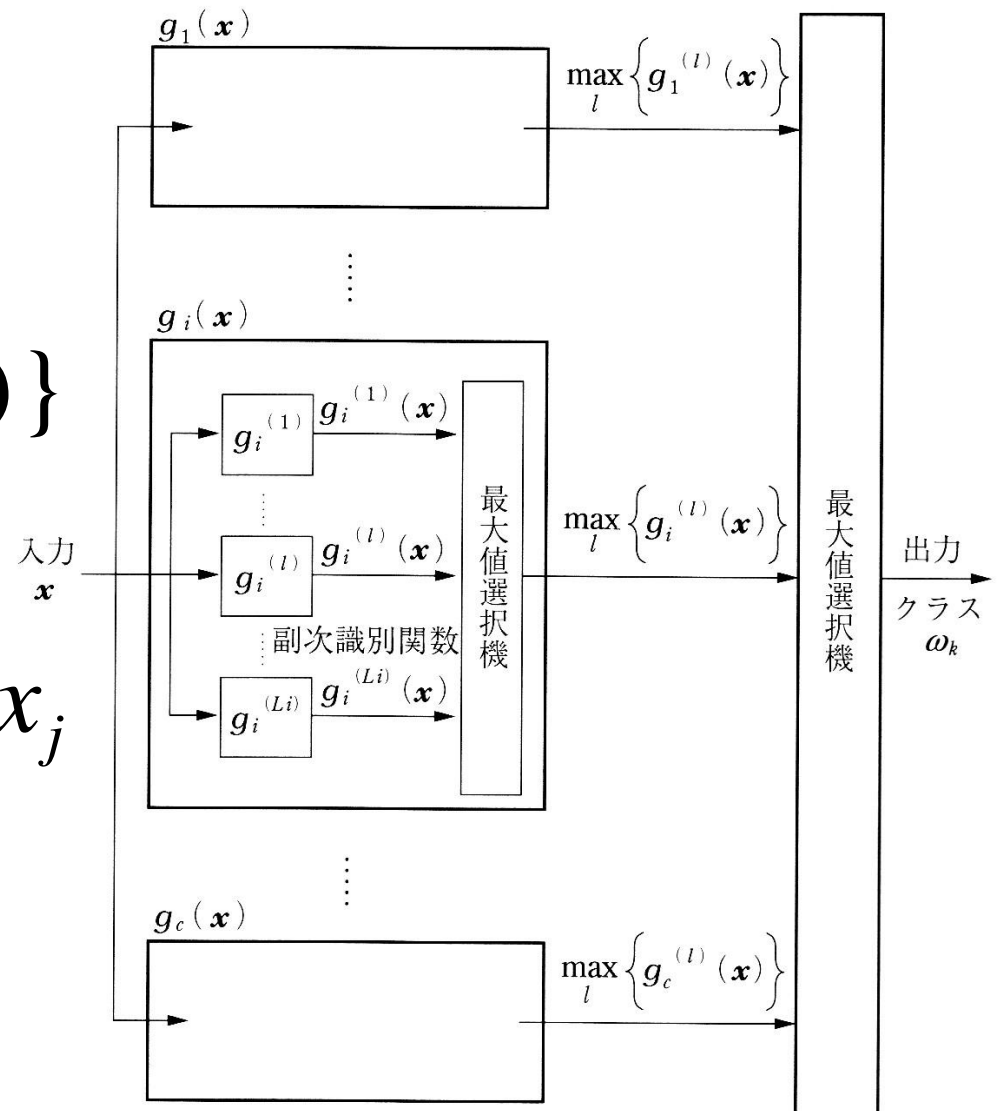


図 2・11 区分的線形識別関数

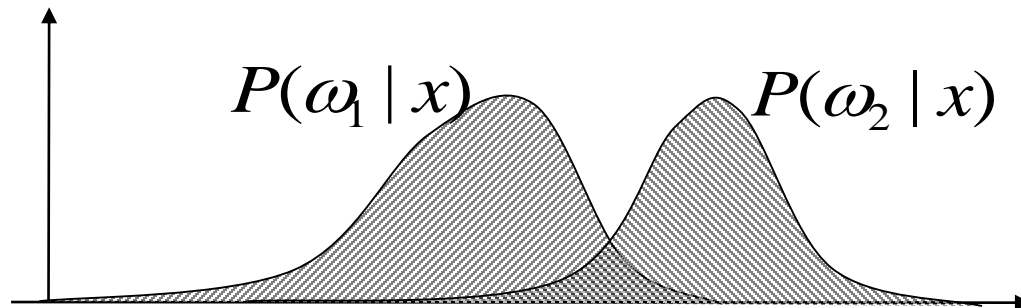
# 誤り確率

- ある  $x$  に対する誤り確率 (2クラスの場合)

$$P_e(x) = \begin{cases} P(\omega_1 | x) & (x \in \omega_2) \\ P(\omega_2 | x) & (x \in \omega_1) \end{cases}$$

- $P_e(x)$  を最小化するには、下記のように判断すれば良い

$$\begin{cases} P(\omega_1 | x) > P(\omega_2 | x) \Rightarrow x \in \omega_1 \\ P(\omega_1 | x) < P(\omega_2 | x) \Rightarrow x \in \omega_2 \end{cases}$$



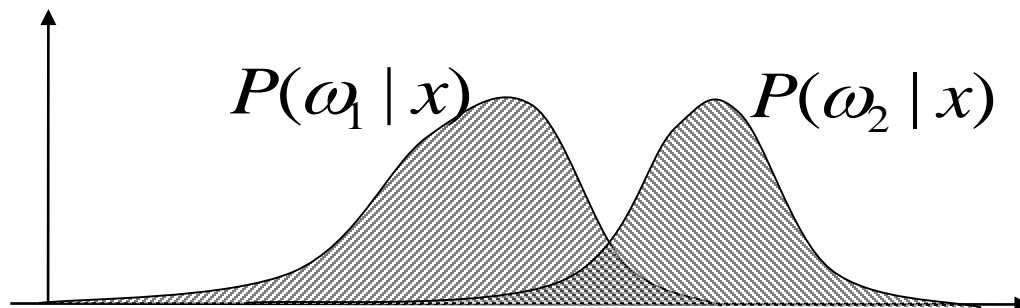
# Bayes誤り確率(要チェック)

- Bayes誤り確率(避けることのできない誤り率)

$$P_e = \int \min_{i=1}^M [P(\omega_i | x)] p(x) dx$$

$$= \int P_e(x) p(x) dx$$

$$P_e(x) = \min_{i=1}^M [P(x | \omega_i)]$$



# 最近傍識別器の誤り確率(2クラスの場合)

- プロトタイプ集合  $\{x_1, \dots, x_n\}$
- 入力  $x$  に対する最近傍パターン  $x'$  ( $x' \in \{x_1, \dots, x_n\}$ )
- 誤り確率  $P_{NNerr}(x) = P(\omega_1 | x)P(\omega_2 | x') + P(\omega_2 | x)P(\omega_1 | x')$
- 全ての  $x$  に対する誤り確率
$$P_{NNerr} = \int P_{NNerror}(x) p(x) dx$$
- 仮定  $\lim_{n \rightarrow \infty} x' = x$
- したがって  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\omega_i | x') = P(\omega_i | x)$  が成り立つ。
- このことから、
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_{NNerr}(x) &= 2P(\omega_1 | x)P(\omega_2 | x) \\ &= 2P(\omega_1 | x) \{1 - P(\omega_1 | x)\} \\ &= 2P_e(x) \{1 - P_e(x)\} \end{aligned}$$

# 最近傍識別器のBayes誤り確率(2クラスの場合)

- Bayes誤り確率と最近傍識別器の誤り確率の比較

$$\begin{aligned} P_{NNerr} &= \int \{ \lim_{n \rightarrow \infty} P_{NNerr}(x) \} p(x) dx & P_{NNerr} &= \int 2P_e(x)(1-P_e(x))p(x)dx \\ &= \int 2P_e(x)(1-P_e(x))p(x)dx & &= \int (P_e(x) + P_e(x))(1-P_e(x))p(x)dx \\ &= 2P_e(1-P_e) - 2\text{Var}(P_e(x)) & &= P_e + \int P_e(x)(1-2P_e(x))p(x)dx \\ &\leq 2P_e(1-P_e) & &\geq P_e \end{aligned}$$

- したがって、2クラスの場合

$$P_e \leq P_{NNerr} \leq 2P_e(1-P_e)$$

- Mクラスの場合の最近傍識別器の誤り確率

$$P_e \leq P_{NNerr} \leq P_e \times \left( 2 - M \frac{P_e}{M-1} \right)$$

# 最近傍識別器のBayes誤り確率(2クラスの場合)

- 大量のデータが与えられる場合、全数記憶に基づく最近傍識別器は漸近的にBayes誤り確率の2倍未満が達成できる。

# 最近傍識別器の一般化

## k-最近傍識別

- 入力パターン  $x$  に対して、最も近い  $k$  個のプロトタイプを探し、それらに対して割り当てられたクラスラベルのうちで、最も多いクラスに分類する。
- これは、 $x$  付近での確率密度を近似計算し、その中で最も高い確率密度を持つクラスに分類するというを行っていることと等価である。
- この結果、少ないプロトタイプでも前述のBayes誤りの2倍未満が達成されるようになる。
- 問題点は、Condensingアルゴリズムと併用できないことである。